Science&Philosophy Vol. 1, No 1, (2013) pp. 131 – 142
ISSN 2282-7765 [online] ISSN 2282-7757 [testo stampato]

Sull'ambito del logicamente possibile secondo la concezione probabilistica di Bruno de Finetti

Pierpaolo Angelini[1]

Sunto. Si rilevano le fondamentali caratteristiche geometriche dei numeri aleatori, degli eventi aleatori, degli enti aleatori e delle funzioni aleatorie prima della realizzazione, da parte dell'individuo, della valutazione probabilistica. Qualunque problema relativo alla scelta delle opzioni ammissibili può raffigurarsi attraverso gli enti aleatori.

Parole Chiave: possibilità, geometria, linearità

Abstract. The fundamental geometric characteristics of random numbers, random events, random structures, and random functions are noticed before the subjective probabilistic evaluation.

Keywords: possibilities, geometry, linearity

1. I linguaggi matematici delle alternative possibili

Distinguendo tra il carattere soggettivo della probabilità e quello oggettivo degli elementi ai quali la probabilità soggettiva si riferisce si osserva che la logica del certo (o del vero-falso) si occupa dei numeri aleatori, degli eventi aleatori, degli enti aleatori, delle funzioni aleatorie, cioè, degli elementi oggettivi della probabilità soggettiva, con il preciso intendimento di individuarne le caratteristiche fondamentali prima della realizzazione da parte dell'individuo della valutazione probabilistica. Tali caratteristiche fondamentali consistono nel fatto che i numeri, gli eventi, gli enti e le funzioni non hanno nulla di particolare tranne che sono aleatori, ossia, dal momento che non sono conosciuti da un certo soggetto non possono avere per lui un unico valore certo. I valori possibili del numero aleatorio X (sempre

[1] ITAS "E. Sereni" Roma, pp.angelini@virgilio.it

espresso con una lettera maiuscola) sono oggettivi perché dipendono da circostanze oggettive consistenti nell'imperfetto stato d'informazione del soggetto, cioè, nel suo grado di ignoranza. Quando l'individuo determina i valori (per lui) possibili del numero aleatorio X non fa assolutamente ricorso a sue opinioni soggettive e, nel contempo, delinea il dominio dell'ignoto nel quale successivamente troverà spazio la nozione soggettiva di probabilità[2] che è lo strumento necessario per prendere decisioni coerenti. Le informazioni e le conoscenze dell'individuo gli possono consentire di eliminare una parte delle alternative che possono essere immaginate in quanto esse sono da ritenersi impossibili, cioè, certamente false. Tutte le altre alternative, invece, risulteranno possibili. Del resto, ci si limiterebbe ad un'analisi non accurata qualora si riunissero insieme, allo scopo di ottenere un'unica alternativa certa, cioè, certamente vera, tutte le alternative possibili che come tali non sono né certamente vere né certamente false. In base ai problemi che vengono analizzati si può scegliere liberamente sia la forma (più o meno minuziosa) in cui si crede opportuno classificare le varie alternative possibili sia i diversi linguaggi in cui esprimere ciò che si ritiene logicamente possibile. I numeri aleatori, gli eventi aleatori, gli enti aleatori e le funzioni aleatorie sono le nozioni alle quali ci si riferisce parlando dei linguaggi matematici delle eventualità possibili. Tali nozioni permettono di collocare nello schema universale, consistente nel

[2] Per probabilità soggettiva s'intende il grado di fiducia di un certo soggetto, in un certo momento e con un certo insieme d'informazioni, relativamente al verificarsi di un evento. Una previsione elaborata secondo la logica dell'incerto è una valutazione delle probabilità da assegnare e distribuire, conformemente alle opinioni di un dato individuo, fra un insieme qualsiasi di eventualità possibili (la distinzione fra eventualità possibili e no rientra nella logica del certo). Invece, una predizione (o profezia) è l'asserzione fatta da un individuo che qualcosa, anche se logicamente possibile, non si verificherà o che qualcosa, pur non logicamente certa, avverrà. Una predizione, dopo aver conosciuto il suo risultato, è inevitabilmente indovinata (cioè, vera) o sbagliata (cioè, falsa). Di una previsione nulla di simile può dirsi, qualunque cosa accada. Al cambiare dello stato d'informazione e di conoscenza si modificano le previsioni su di esso basate. È irragionevole voler criticare la previsione fondata su uno stato di conoscenze quando l'esame poggia su un insieme differente di conoscenze. Quindi, logica del certo e dell'incerto (o del più e meno probabile) devono essere distinte così come, rispettivamente, predizione e previsione.

separare le alternative conosciute come impossibili da quelle reputate possibili, i tipi di problemi più importanti. Il senso che si attribuisce all'aggettivo "aleatorio" è quello di non conosciuto per l'individuo del cui stato d'incertezza ci si occupa[3]. Di conseguenza, "aleatorio" non vuol dire indeterminato ma, all'opposto, vuol dire stabilito in modo inequivocabile. Ad esempio, se Tizio decide di stipulare un contratto di assicurazione contro l'incendio della propria automobile non sa se l'evento pregiudizievole, che deve essere precisato nella polizza senza possibilità di errore[4], si verificherà. Pertanto, l'evento è aleatorio pur essendo individuato esattamente. Nel caso in cui dovesse verificarsi l'incendio, Tizio ha diritto all'indennizzo in virtù dell'assicurazione che è imperniata sulla circostanza aleatoria di per sé identificata in modo ineccepibile.

2. Numeri ed eventi aleatori

Per un determinato individuo un numero aleatorio è tale quando non è conosciuto. Quindi, egli si trova nell'incertezza fra almeno due valori possibili. Solitamente, i valori numerici possibili (interi o reali) sono più di due in numero finito, oppure, in numero infinito. Uno soltanto è il vero valore di ciascun numero aleatorio. Per il numero aleatorio X l'insieme dei valori possibili è I(X). Per tale insieme l'estremo inferiore (coincidente con il più piccolo valore possibile per X) è inf I(X), oppure, più concisamente, inf X; l'estremo superiore (coincidente con il più grande valore possibile per X) è sup I(X), oppure, più in breve, sup X. Quando inf X e sup X sono entrambi

[3] L'incertezza o non conoscenza deve essere riferita obbligatoriamente all'individuo. Non è detto che ciò che una singola persona ignora sia universalmente non conosciuto.

[4] Si può ammettere che la polizza preveda principalmente, come cause di incendio che danno diritto all'indennizzo, esplosioni, fulmini, surriscaldamento di parti infiammabili, corti circuiti. Inoltre, è possibile ipotizzare sia che la copertura assicurativa del contratto si estenda fino ad includere l'incendio del garage o box auto (in affitto o di proprietà dove il veicolo è custodito) sia che venga escluso il risarcimento nel caso di un incendio provocato da oggetti presenti all'interno dell'automobile.

finiti si dice che il numero aleatorio X è bilateralmente limitato. Esso è inferiormente limitato nel caso in cui inf X è finito, superiormente limitato nel caso in cui sup X è finito. Ci si trova nella situazione di illimitatezza bilaterale quando inf X = − ∞ e sup X = + ∞, di illimitatezza inferiore quando inf X = − ∞, di illimitatezza superiore quando sup X = + ∞. È un numero aleatorio anche ogni funzione di un numero aleatorio, Y = f(X), di due numeri aleatori, Z = f(X, Y), oppure, di più di due. Per converso, una funzione di un numero aleatorio è un numero certo[5], y = f(x), quando y è una costante in corrispondenza dei valori numerici possibili per il numero aleatorio X.

Analogamente, hanno significato oggettivo le affermazioni delle quali si può sempre dire, dopo l'osservazione, se sono vere o se sono false. Tali affermazioni oggettive vengono studiate dalla logica del certo. Esse si dicono proposizioni se si fa riferimento alla loro formulazione linguistica, oppure, eventi se si fa riferimento alle situazioni casuali dalle quali scaturisce la loro verità o la loro falsità. Le valutazioni soggettive di probabilità si applicano sulle affermazioni fino a quando non si scopra se esse sono vere o false. Le proposizioni che non sono oggettivamente determinate, quindi, che non sono né certe né impossibili secondo la logica del vero-falso, sono logicamente possibili. Sulla base della convenzione che trasforma il valore logico vero nel numero 1 ed il valore logico falso nel numero 0, un evento aleatorio è considerato alla stessa stregua di un numero aleatorio avente solamente due valori possibili, 1 e 0. Ad esempio, si supponga di lanciare un dado e di volerne osservare la faccia che si presenta dopo il lancio. Ciò che non si conosce prima di fare l'esperimento costituisce l'ambito del logicamente possibile, l'ambito delle possibilità. Se si decide di scommettere sulla faccia del dado contrassegnata dal numero 5 si osserva che, prima di effettuare il lancio, la proposizione "il risultato del lancio del dado è l'uscita della

[5] Un numero certo (indicato con una lettera minuscola) è un numero aleatorio degenere. Il dominio della trasformazione y = f(x) = costante, come d'altro canto quello di Y = f(X), è l'insieme dei valori possibili per il numero aleatorio X. Rispetto alla funzione y = f(x), l'immagine tramite f di ciascun elemento dell'insieme dei valori possibili per X è incessantemente lo stesso numero certo, cioè, y = f(x) = costante.

faccia contrassegnata dal numero 5” è logicamente possibile. Invece, dopo aver compiuto l’esperimento del lancio tale proposizione è vera se è uscito il numero 5, è falsa se è uscito qualsiasi altro numero diverso dal numero 5. In riferimento alla provvisoria conoscenza di ciascun individuo risulta certamente vero (cioè, certo) che in un lancio del dado apparirà una delle sei facce contraddistinte con i numeri da 1 a 6, mentre risulta certamente falso (cioè, impossibile) che, nello stesso lancio, potrà apparire la faccia contrassegnata dal numero 10 o dal numero 20.

3. Enti aleatori

Qualunque problema relativo alla scelta delle opzioni ammissibili può raffigurarsi attraverso gli enti aleatori per la cui rappresentazione è utile pensare ad un insieme (o spazio) delle alternative $\boldsymbol{\mathcal{S}}$, il cui sottoinsieme $\boldsymbol{\mathcal{Q}}$ è costituito dalle sole eventualità possibili (per un certo individuo in un dato momento).

Lo spazio delle alternative $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ di un numero aleatorio X coincide con l’intero asse[6] reale x sul quale è possibile considerare l’insieme $\boldsymbol{\mathcal{Q}}$ (sottoinsieme di $\boldsymbol{\mathcal{S}}$) degli unici punti (valori) possibili per un determinato soggetto. Ogni numero reale dell’asse x è un punto di $\boldsymbol{\mathcal{S}}$. Siccome ciascun valore possibile di X è un evento al quale corrispondono due valori numerici, tutti i valori possibili di X sono degli eventi contemplati congiuntamente e non apertamente nell’insieme $\boldsymbol{\mathcal{Q}}$. Conformemente agli elementi (valori possibili di X) che costituiscono $\boldsymbol{\mathcal{Q}}$, dei quali solo uno è vero, in determinati casi il numero aleatorio X potrebbe essere una semiretta, $X \geq x$, potrebbe identificarsi con un intervallo, $x_1 \leq X \leq x_2$, oppure, potrebbe appartenere ad un insieme qualsiasi $\boldsymbol{\mathcal{I}}$.

Se sono due i numeri aleatori, X ed Y, l’insieme delle alternative $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ è il piano cartesiano. I punti del piano sono in corrispondenza

---

[6] Fissando sulla retta un’origine, un verso di percorrenza ed un’unità di misura, esiste una corrispondenza biunivoca tra i punti della retta e l’insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali (avente struttura di spazio vettoriale di dimensione 1 su $\mathbb{R}$).

biunivoca con l'insieme $\mathbb{R}^2$ delle coppie ordinate di numeri reali avente struttura di spazio lineare di dimensione 2 nel quale (x, y) è un suo generico elemento. Per i due numeri aleatori (X, Y) l'insieme $\boldsymbol{Q}$ dei punti possibili (per un determinato individuo), sottoinsieme di $\boldsymbol{S}$, è formato dalle coppie di valori possibili per X e per Y. Ogni evento inerente alla coppia di numeri aleatori (X, Y) individua un insieme $\boldsymbol{J}$ di $\boldsymbol{S}$. Ad esempio, se una coppia di numeri aleatori (X, Y) deriva dall'esperimento che consiste nel gettare due dadi, uno dopo l'altro, fino a quando non si verifichi l'esito per il quale risultano identici i numeri delle due facce che si presentano, lo spazio delle alternative $\boldsymbol{S}$ consta di trentasei punti del piano cartesiano, mentre i risultati possibili dell'esperimento appartenenti all'insieme $\boldsymbol{Q}$ sono sei (dei quali soltanto uno è vero). In riferimento allo stesso esperimento, è un evento relativo ad (X, Y) la proposizione "nel lanciare due dadi in successione, la somma delle due facce che appaiono è pari a tre": tale proposizione determina $\boldsymbol{J} = \{(1,2),(2,1)\}$ di $\boldsymbol{S}$ la cui intersezione con $\boldsymbol{Q} = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$ è vuota.

Se i numeri aleatori sono tre, X, Y, Z, l'insieme delle alternative $\boldsymbol{S}$ è lo spazio tridimensionale riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali le cui generiche coordinate cartesiane sono x, y, z.

Nel caso di più di tre numeri aleatori lo spazio teorico delle alternative $\boldsymbol{S}$ non è rappresentato graficamente essendo visivamente non intuitivo andare oltre la terza dimensione.

Ad esempio, se s'intende scagliare una piccola freccia con una mano, dall'alto verso il basso, contro il fondo rettangolare di una scatola di cartone aperta solo nella sua parte superiore e collocata sul pavimento, rispetto al quale è perpendicolare la posizione dello scagliatore, il punto colpito dall'estremità della freccetta è aleatorio (non lo si può conoscere prima di effettuare il lancio). Sono infinitamente non numerabili i punti di $\boldsymbol{S}$ che, appartenendo alla superficie piana (limitata) del fondo rettangolare della scatola, possono essere colpiti dalla freccetta. Per l'insieme $\boldsymbol{S}$ l'immagine geometrica della superficie piana rettangolare prende corpo naturalmente senza aver bisogno dell'esplicito riferimento a qualsiasi sistema di coordinate (non solo cartesiane).

Nello spazio tridimensionale è aleatorio, ad esempio, il punto dove si trova in un preciso istante un'autovettura rubata dotata di antifurto satellitare che, quando si verifica il trafugamento, invia ad un centro di controllo un segnale radio attraverso cui risulta possibile determinare la posizione del veicolo. L'insieme $\boldsymbol{S}$, corrispondendo al consueto spazio fisico esteso in lunghezza, larghezza ed altezza nel quale si muovono o si collocano i corpi, fornisce un'immagine geometrica immediata non dipendente dalle coordinate.

In un sistema di assi cartesiani di dimensione 3 è possibile raffigurare graficamente, secondo il punto di vista della meccanica classica, una data posizione conosciuta ed il successivo spostamento conosciuto di un punto materiale. Tale condizione è espressa da sei numeri che costituiscono due terne distinte: la prima terna contiene le tre coordinate spaziali relative alla posizione della particella in un istante determinato, la seconda rappresenta le tre componenti del suo vettore velocità (ossia, della sua quantità di moto) nell'istante successivo. Anziché tenere conto di due terne di uno spazio tridimensionale si può considerare una sestupla di uno spazio a 6 dimensioni. Un punto materiale è aleatorio per un determinato individuo quando non sono conosciute né la sua posizione né la sua velocità ed il suo modello geometrico naturale, svincolato dalle coordinate, è lo spazio avente dimensione 6. Per contro, se sono in numero di n (n = intero positivo) i punti materiali aleatori per i quali, pertanto, un certo soggetto ignora posizioni e velocità di ognuno, la loro forma geometrica diretta è lo spazio delle fasi di dimensione 6n che descrive tutte le possibili posizioni e velocità di ciascun punto materiale del sistema.

Un vettore è una n-upla del tipo $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, con n numero intero ≥ 1. I numeri reali $x_1, \dots, x_n$ si chiamano componenti del vettore ed il numero x_i è l'i-esima componente di $(x_1, \dots, x_n)$. Ad esempio, la lista dei prezzi unitari conosciuti di dieci articoli specifici, posti in vendita in un determinato negozio, è la decupla $(p_1, \dots, p_{10})$. Dato n, un vettore è aleatorio per un certo individuo quando egli non conosce le singole componenti della lista ordinata di n numeri reali, essendo tale lista il vettore vero. Per lo stesso individuo sono possibili diverse n-uple di $\mathbb{R}^n$ costituenti, perciò, l'insieme $\boldsymbol{Q}$. La linearità della struttura dello spazio delle alternative $\boldsymbol{S}$ proviene dal fatto che esso, coincidendo con l'insieme di tutte le n-uple di $\mathbb{R}^n$, è uno spazio vettoriale (lineare) su $\mathbb{R}$. Ciascuna n-upla di $\mathbb{R}^n$, appartenendo all'insieme $\boldsymbol{S}$, è un punto di $\boldsymbol{S}$.

Una matrice (a_{ij}) m × n, con m, n ≥ 1, è un quadro di mn numeri reali, ossia, $(a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$, in base al quale gli elementi di ciascuna riga possono essere pensati, ad esempio, come i prezzi unitari conosciuti di n articoli determinati posti in vendita in m negozi differenti. L'insieme di tutti i prospetti di mn numeri reali è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ isomorfo allo spazio vettoriale $\mathbb{R}^{mn}$, giacché è possibile scrivere su un'unica riga le mn componenti del vettore-riga di $\mathbb{R}^{mn}$ o su un'unica colonna le mn componenti del vettore-colonna di $\mathbb{R}^{mn}$. Per un certo soggetto una matrice, avente un dato numero di righe ed un dato numero di colonne, è aleatoria se egli non conosce i coefficienti reali di ciascuna riga, oppure, in modo equivalente, di ciascuna colonna della matrice vera. Quindi, le matrici possibili per tale soggetto, qualificanti l'insieme $\boldsymbol{Q}$, e tutte quelle dello spazio delle alternative $\boldsymbol{S}$ avente struttura di spazio vettoriale (spazio delle matrici m × n) su $\mathbb{R}$, hanno lo stesso numero predeterminato di righe e di colonne. Ogni matrice m × n di $\boldsymbol{S}$ è un "punto" di $\boldsymbol{S}$.

Una funzione scalare di una variabile reale, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, è una legge che associa a ciascun elemento del dominio $\mathbb{R}$ uno ed un solo elemento del codominio $\mathbb{R}$. Se tale legge non è conosciuta da un certo individuo allora la funzione corrispondente è per lui aleatoria. L'insieme di tutte le funzioni di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ e s'identifica con $\boldsymbol{S}$. Ogni funzione di $\boldsymbol{S}$ è un "punto" di $\boldsymbol{S}$.

Le curve aleatorie e gli insiemi aleatori superficiali sono insiemi aleatori che conferiscono allo spazio delle alternative $\boldsymbol{S}$ una struttura non lineare. Una curva aleatoria è, ad esempio, il percorso sconosciuto (per una determinata persona) di un aereo, dalla fase di decollo a quella di atterraggio. Ogni singola traiettoria (insieme infinito di punti) di tale aereo costituisce un "punto" dello spazio $\boldsymbol{S}$.

Si ha un insieme aleatorio superficiale se un dato soggetto non conosce, ad esempio, la parte della superficie territoriale italiana, visualizzabile tramite cartina satellitare, sulla quale è caduta pioggia nelle ultime dodici ore a partire da un istante liberamente scelto. Ciascuna parte della superficie[7] (insieme infinito di punti essendo il territorio visualizzato mediante mappa satellitare) è un "punto" dello spazio $\boldsymbol{S}$.

4. Funzioni aleatorie

Per un determinato soggetto una funzione è aleatoria e denotata con Y(t), dove la variabile t è il tempo, quando egli non ne conosce l'andamento perché l'incertezza esiste in ogni istante. Di conseguenza, in seguito alla misurazione, se si avesse cognizione dei valori di Y(t) in un numero grande (finito) di istanti t = t_1, …, t_n, il valore di Y(t) in un differente istante t sarebbe in ogni caso sconosciuto. Ciascuna funzione potenzialmente misurabile in un numero grande (finito) di istanti[8], con valori $Y(t_1)$, …, $Y(t_n)$, è un "punto" dello spazio $\boldsymbol{S}$ delle alternative. Quando ci si domanda se i valori di una data funzione Y(t) di $\boldsymbol{S}$, misurati in determinati istanti t = t_1, …, t_n, saranno inclusi o meno, ad esempio, negli insiemi $a_h \leq Y(t_h) \leq b_h$ (con h = 1, …, n) definiti da due coordinate liberamente stabilite, potranno essere veri o falsi i singoli eventi $a_1 \leq Y(t_1) \leq b_1$, …, $a_n \leq Y(t_n) \leq b_n$ osservabili, rispettivamente, negli intervalli $[a_1, b_1]$, …, $[a_n, b_n]$. Ad esempio, la relazione Y(t) = Asen(t), con l'angolo t espresso in radianti, pur essendo una funzione incognita non è una funzione aleatoria per il fatto che l'individuo conosce la legge trigonometrica descritta dal

[7] Tra le diverse parti della superficie territoriale italiana che compongono lo spazio $\boldsymbol{S}$ delle alternative si hanno sia la parte vuota (a cui corrisponde l'alternativa in base alla quale, nelle ultime dodici ore, non è caduta pioggia su nessuna zona del territorio italiano) sia la parte totale (a cui corrisponde l'eventualità in base alla quale, nelle ultime dodici ore, è caduta pioggia su tutto il territorio della penisola italiana).

[8] Per il concetto stesso di funzione non è possibile associare ad un elemento del dominio due elementi del codominio, cosicché all'istante t_i (con i = 1, …, n), appartenente al dominio di ogni funzione virtualmente misurabile ristretta al sottoinsieme $\{t_1, \dots, t_n\}$ dell'insieme continuo di tutti gli istanti, deve sempre associarsi uno ed un solo elemento $Y(t_i)$ del codominio.

seno di t, mentre ignora il parametro A che, quindi, è per lui aleatorio. La posizione delle funzioni aleatorie, in merito alla loro raffigurazione per mezzo dello spazio delle alternative $\boldsymbol{\mathcal{S}}$, è analoga a quelle estreme degli eventi aleatori da un lato, degli enti aleatori dall'altro, ed a quella centrale dei numeri aleatori.

5. Lo spazio $\mathcal{S}$ delle alternative

Lo spazio $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ delle alternative è un insieme di punti il cui sottoinsieme $\boldsymbol{\mathcal{Q}}$, eventualmente coincidente con $\boldsymbol{\mathcal{S}}$, è formato da quegli eventi che hanno la caratteristica di non essere ulteriormente divisibili per lo specifico problema oggetto di studio. Tra i punti di $\boldsymbol{\mathcal{Q}}$ (e, quindi, di $\boldsymbol{\mathcal{S}}$) ve n'è uno particolarmente importante, indicato con Q, che rappresenta l'eventualità che effettivamente si realizzerà ex post. Il punto Q (che è ex ante aleatorio) è l'essenza di ciascun problema riguardante le alternative $\boldsymbol{\mathcal{Q}}$ contenute nell'insieme $\boldsymbol{\mathcal{S}}$.

Se si lancia, ad esempio, una stessa moneta tre volte di seguito e si osservano le sequenze di teste (testa = T) e di croci (croce = C) che appaiono, si ha $\boldsymbol{\mathcal{Q}} = \{\mathrm{TTT}, \mathrm{TTC}, \mathrm{TCT}, \mathrm{TCC}, \mathrm{CTT}, \mathrm{CTC}, \mathrm{CCT}, \mathrm{CCC}\}$. Secondo il modello di rappresentazione fondato sullo spazio $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ delle alternative, ogni evento E è l'insieme di tutti i punti Q per i quali E è vero. Pertanto, l'evento E = $\{\mathrm{TTT}, \mathrm{TTC}, \mathrm{CTT}\}$ è indifferentemente vero se Q = TTT, oppure, se Q = TTC, oppure, se Q = CTT. L'evento E s'interpreta come la funzione del punto Q, ossia, E = E(Q), avente valore 1 sui punti Q dell'insieme E, valore 0 sui punti Q di un altro insieme diverso dall'insieme E.

Similmente, ogni numero aleatorio X è una funzione reale dei punti Q, cioè, X = X(Q). Il valore (reale) che X assume nel caso in cui il punto vero sia Q è X = X(Q), derivando da ciò che il numero aleatorio X dipende funzionalmente da Q.

Ad esempio, se vengono gettati due dadi, l'insieme $\boldsymbol{\mathcal{Q}}$ consta delle trentasei coppie ordinate di numeri compresi fra 1 e 6, cioè, si ottiene $\boldsymbol{\mathcal{Q}} = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), \ldots, (6,6)\}$. Nell'ipotesi in cui si attribuisca a ciascun punto (a, b) di $\boldsymbol{\mathcal{Q}}$ la somma (a + b) dei valori numerici associati alle facce dei due dadi che si presentano, I(X) è $\boldsymbol{Q}_{\mathrm{X}} = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ a seconda che il punto vero, assolutamente inconoscibile prima di effettuare il lancio, risulti essere Q = 2, oppure, Q = 3, …, oppure, Q = 12.

Qualora il punto vero Q fosse, ad esempio, una n-upla di $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$, con n numero intero > 1, l’ente aleatorio corrispondente sarebbe un vettore, anch’esso funzione del punto Q di $\boldsymbol{Q}$. Mentre la suddivisione in sottoinsiemi di un insieme formato da elementi o punti è destinata a fermarsi allorché si perviene a dividere tale insieme nei punti che effettivamente lo costituiscono, per un evento è sempre possibile continuare la divisione[9] sebbene ci si blocchi, per convenienza, quando la partizione in eventi atomici[10] (punti dell’insieme $\boldsymbol{Q}$ che è sottoinsieme di $\boldsymbol{S}$) è sufficiente in base all’analisi in questione.

---

[9] Ad esempio, se si considera l’evento E “in n lanci (con n intero ≥ 2) di una stessa moneta si presentano due o più croci consecutive”, si ha $\boldsymbol{Q} = \{\mathrm{TT, TC, CT, CC}\}$ nel caso in cui la moneta fosse lanciata due volte di seguito. Se la stessa moneta venisse lanciata tre volte si avrebbe $\boldsymbol{Q} = \{\mathrm{TTT, TTC, TCC, TCT, CTT, CTC, CCC, CCT}\}$, nel lanciarla quattro volte si avrebbe $\boldsymbol{Q} = \{\mathrm{TTTC, TTTT, TTCT, TTCC}, \dots, \mathrm{CCTT}\}$ e così via proseguendo nella suddivisione dell’insieme delle alternative possibili dato che la moneta considerata in E può essere lanciata un numero finito (anche grande) di volte.

[10] La riduzione ai punti dello spazio delle alternative possibili deve essere accettata con un grano di buon senso.

La geometria continua di von Neumann è una struttura chiusa che comprende, in luogo dei punti, tutti i sottospazi vettoriali di un dato spazio lineare. Esiste una corrispondenza biunivoca, espressa dalla funzione $\mathrm{D(a)} = \frac{\mathrm{d(a)} + 1}{\mathrm{n}}$ (con n numero naturale diverso da 0), tra l’insieme delle dimensioni originarie di ciascun sottospazio e l’insieme normalizzato dei numeri reali associati, compresi tra 0 (per lo spazio vuoto) ed 1 (per lo spazio totale) nell’indicazione della dimensione di tutti i sistemi lineari della struttura.

Per il sistema vuoto, essendo d(a) = − 1, si ha D(a) = 0. Per il punto, poiché si ha d(a) = 0, si ottiene D(a) = $\frac{1}{\mathrm{n}}$. Per la retta, dato che d(a) = 1, risulta D(a) = $\frac{2}{\mathrm{n}}$. Per il piano, avendosi d(a) = 2, si ottiene D(a) = $\frac{3}{\mathrm{n}}$. Per lo spazio tridimensionale, giacché d(a) = 3, si ha D(a) = $\frac{4}{\mathrm{n}}$. Da ultimo, si arriva al sistema lineare per il quale, considerato che d(a) = (n − 1), si ricava D(a) = 1. Ogni sottospazio lineare, indicato con a, è un sottospazio proprio di quello immediatamente successivo.

Nel prendere in esame strutture che anziché essere chiuse sono aperte, non vincolate, è naturale pensare inserito in esse tutto ciò che appare utile sulla base di situazioni contingenti, non precostituite.

Bibliografia

[1] Daboni L. (1974) *Calcolo delle probabilità ed elementi di statistica*, UTET, Torino

[2] de Finetti B. (1959) *Matematica logico-intuitiva*, Cremonese, Roma

[3] de Finetti B. (2006) *Opere scelte, Voll. I e II (a cura dell'UMI e dell'AMASES),* Edizioni Cremonese, Firenze

[4] de Finetti B. (1931) Sul significato soggettivo della probabilità, *Fundamenta Mathematicae*, 17, 298-329

[5] de Finetti B. (2005) *Teoria delle probabilità*, Giuffrè, Milano

[6] de Finetti B. (1967) L'adozione della concezione soggettivistica come condizione necessaria e sufficiente per dissipare secolari pseudoproblemi, in: *I fondamenti del calcolo delle probabilità. Atti della tavola rotonda tenuta a Poppi nei giorni 11-12 giugno 1966 (a cura di) D. Fürst e G. Parenti*, Scuola di Statistica dell'Università, Firenze, 57-94

[7] Maturo A., (2009), La moderna visione interdisciplinare di Geometria, Logica e Probabilità in Bruno de Finetti. *Ratio Sociologica*, Vol. 1, No. 2, 2008, 39-62

[8] Scozzafava R. (2001) *Incertezza e probabilità*, Zanichelli, Bologna

[9] Sernesi E. (2000) *Geometria 1*, Bollati Boringhieri, Torino

[10] von Neumann J. (1936) Continuous geometry, *Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA*, 22, 92-100